BANCO DE MEXICO

4ª Jornada de Riesgos Financieros
RiskLab-Madrid

CyRCE:

Un modelo de Riesgo de Crédito para Mercados Emergentes.

Javier Márquez Diez-Canedo.

DICIEMBRE 2004

Auditorio del BBVA / Paseo de la Castellana, 81

Índice

Introducción

- **En mercados emergentes, la información es escasa y la cultura del riesgo es incipiente. La medición del riesgo de crédito se dificulta y esto se debe a:**
  - **Metodologías comerciales más aceptadas de Medición de Riesgo de Crédito:**
    - **Son complejas con grandes requerimientos de información.**
    - **Técnicas numéricas que requieren un gran esfuerzo computacional.**
  - **Información: escasa, de mala calidad y no compatible con los modelos.**

En cualquier caso.......

1. Todos los modelos dependen de supuestos importantes.

- El mayor esfuerzo se invierte en tratar de obtener la “mejor” distribución de pérdidas.
- No es clara la relación existente entre el riesgo de crédito y los parámetros de gestión:
  - Suficiencia de Capital.
  - Valuación.
  - Límites individuales, etc.

CyRCE: Propiedades

Es un *modelo de incumplimiento* para riesgo de crédito suponiendo que la distribución de pérdidas del portafolio puede caracterizarse por dos parámetros:

Su media y su Varianza.

- **Una expresión cerrada para el Valor en Riesgo (VaR):**

  Relación explícita con los parámetros de gestión:
  Suficiencia de Capital, límites, concentración, etc.

  Análisis del portafolio:
  Concentración de Riesgo, Valuación, Optimización.

  Gran eficiencia computacional:
  Manejo eficiente de portafolios de gran tamaño.

- **Parametrización de los elementos relevantes : Manejo de supuestos, facilita análisis y pruebas de estrés.**

Índice

I. Introducción

II. CyRCE

1. El Modelo General
2. Segmentación del Portafolio
3. Índice de Concentración del Riesgo
4. Estimación con Escasez de Información
5. Comparación con Otros paradigmas

CyRCE: El Modelo General

1. Se tienen probabilidades de incumplimiento (pueden ser <u>distintas)</u> para los acreditados de la cartera:

$$\pi = (p_1 , \ldots, p_N).$$

2. Los incumplimientos de los acreditados se relacionan por medio de la matriz de covarianzas.

$\sigma_{i,j} =$ Covarianza de incumplimiento entre acreditados i, j $= \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} = \mathbf{M}_{i,j}$

$\rho_{i,j}$: **correlación entre incumplimientos de los acreditados *i, j*.**

CyRCE: Valor en Riesgo

El *valor en riesgo* con un nivel de confianza α es:

$$VaR_\alpha = \sum_i p_i f_i + z_\alpha \sqrt{\sum_i \sum_j f_i f_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}$$

PÉRDIDA ESPERADA

VARIANZA

Utilizando notación matricial:

$$VaR_\alpha = \pi^{\mathrm{T}}\mathbf{F} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\,\mathbf{F}}$$

$\pi^{\mathrm{T}} = [\, p_1 \ \ldots \ p_N]^{\mathrm{T}}$

M: matriz de covarianzas.

PÉRDIDA ESPERADA

PÉRDIDA NO ESPERADA

Suficiencia de Capital

La suficiencia de capital K implica $K/V = \psi \geq VaR$

$$\psi \geq \frac{\pi^{\mathrm{T}}\mathbf{F}}{V} + z_{\alpha}\sqrt{\frac{\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{F}}{\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}}H(\mathbf{F})}$$

Pérdida esperada relativa al valor del portafolio.

$\bar{p}$

$$R(\mathbf{F},\mathbf{M}) = \frac{\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{F}}{\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}}$$

Cociente de Rayleigh

Varianza de la pérdida relativa al “tamaño” del portafolio.

CyRCE: Límites Individuales y Concentración

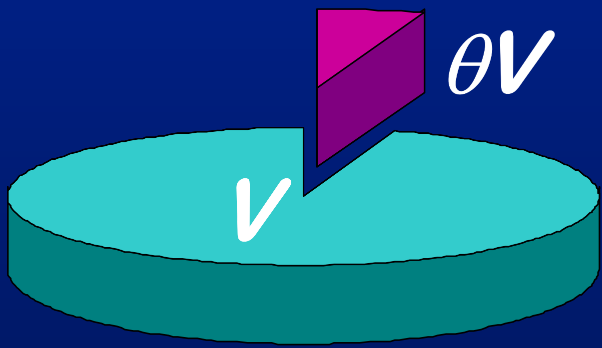
Bajo el modelo general, la cota para el índice de concentración y el límite individual se obtiene mediante:

$$\psi \geq \overline{p} + z_{\alpha}\sqrt{R(\mathbf{F},\mathbf{M})\ \ H(\mathbf{F})}$$

$$H(F) \leq \frac{\left(\psi - \overline{p}\right)^2}{z_{\alpha}^2 R(\mathbf{F},\mathbf{M})}$$

IHH: Límites Individuales y Concentración

Propiedad I
IHH:



$$f_i \le \theta V \qquad i = 1,\ldots,N$$

$$H(\mathbf{F}) \le \theta$$

Entonces:

$$f_i \le \theta V \quad i = 1,\ldots,N$$

$$H(F) \le \theta \le \frac{(\psi - p)^2}{z_\alpha^2 \, R(F,M)}$$

$$\psi$$

La condición sólo es suficiente

CyRCE: El Modelo Simple

La expresión

$$\psi \geq \bar{p} + z_{\alpha}\sqrt{R(\mathbf{F},\mathbf{M})\;H(\mathbf{F})}$$

resulta atractiva porque:

$$\theta \leq \frac{\left(\psi - \bar{p}\right)^{2}}{z_{\alpha}^{2}R(\mathbf{F},\mathbf{M})}$$

Valor en Riesgo de la Cartera

El requerimiento de capitalización: "ψ"

Relaciona

Los límites individuales sobre crédito

El *riesgo de créditos individuales* a través de: "p"

Un indicador de concentración de la cartera: "$H(F)$"

Índice

I. Introducción

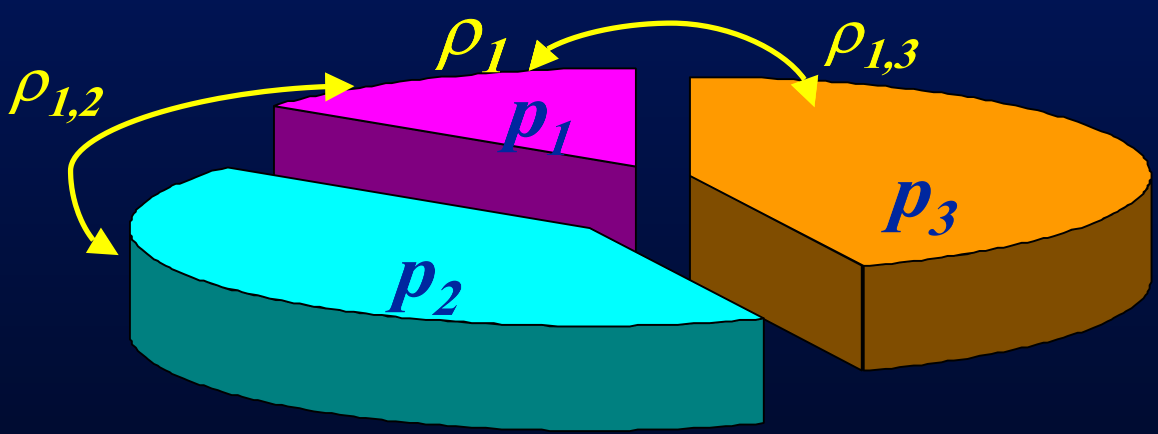
II. CyRCE

1. El Modelo General
2. Segmentación del Portafolio
3. Índice de Concentración del Riesgo
4. Estimación con Escasez de Información
5. Comparación con Otros paradigmas

Segmentación del Portafolio

El portafolio se puede segmentar arbitrariamente:

- Cada grupo tiene la misma probabilidad de incumplimiento.
- La matriz de covarianzas $\mathbf{M}$ incluye dos tipos de covariación:
  - **Idiosincrásica**: entre los incumplimientos del mismo grupo.
  - **Extra-grupo**: entre incumplimientos de segmentos distintos.



CyRCE: Valor en Riesgo (continuación)

La matriz de covarianzas idiosincrásicas del segmento j , R_j, tiene la siguiente estructura:

$$R_j = 0.5 \begin{bmatrix} 0 & \cdots & C_{1,j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{j,1} & \cdots & 2M_j & \cdots & C_{j,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & C_{N,j} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Nótese:

$$\sum_j R_j = \mathbf{M}$$

M_j **= Matriz de covarianzas idiosincrásicas para los acreditados del segmento** j**.**

$C_{j,i}$ **= Matriz de covarianzas entre los incumplimientos de los acreditados del segmento *j* con los acreditados del segmento** i.

CyRCE: Valor en Riesgo

El *valor en riesgo* con un nivel de confianza α para el segmento j es:

$$VaR_{\alpha}^{j} = \pi_j^{\mathrm{T}} \mathbf{F}_j + z_{\alpha} \phi \sqrt{\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_j \mathbf{F}}$$

PÉRDIDA ESPERADA **PÉRDIDA NO ESPERADA**

π_j es el vector de probabilidades de incumplimiento del segmento j

F_j es el vector créditos del segmento j

R_j es la matriz de covarianzas idiosincrásicas del segmento j y covarianzas entre los créditos del segmento j con los créditos de otros segmentos.

ϕ es un factor de ajuste, tal que:

$$\sum_j VaR_{\alpha}^{j} = VaR_{\alpha}$$

CyRCE: Suficiencia de Capital

Después de un poco de álgebra, la relación de Suficiencia de Capital del segmento *j* está dada por:

$$\psi_j \geq \frac{\pi^{\mathrm{T}} \mathbf{F}_j}{V_j} + z_\alpha \phi \sqrt{R(\mathbf{F}_j, \mathbf{M}_j) H(\mathbf{F}_j) + \sum_{i \neq j} \frac{\mathbf{F}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{C}_{j,i} \mathbf{F}_i}{V_j^2}}$$

Proporción de pérdida esperada del segmento *j* con respecto al monto de su cartera.

p

Cociente de Rayleigh del **segmento *j***

IHH

j

Ajuste por Covariación Extra Grupo

La cota sobre la concentración y el límite individual de cada segmento está dada por:

$$H(\mathrm{F_j}) \leq \theta_j \leq \frac{(\psi_j - p_j)^2}{z_\alpha^2 \times \phi^2 \times R(\mathrm{F}_j, \mathrm{M}_j)} - \sum_{i \neq j} \frac{\mathrm{F}_j^{\mathrm{T}} \mathrm{C}_{j,i} \mathrm{F}_i}{V_j^2 \, R(\mathrm{F}_j, \mathrm{M}_j)}$$

Cota por Correlación Idiosincrásica

Ajuste por Covariación Extra Grupo

Índice

I. Introducción

II. CyRCE

1. El Modelo General
2. Segmentación del Portafolio
3. Índice de Concentración del Riesgo
4. Estimación con Escasez de Información
5. Comparación con Otros paradigmas

Índice de Concentración de Riesgo

La correlación entre incumplimientos afecta la concentración y aumenta el riesgo.

Considérese el siguiente caso particular:

Se definen N variables aleatorias que indican el incumplimiento de cada uno de los N deudores en la cartera,

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases} \qquad i = 1,\ldots,N$$

Todas se encuentran idénticamente correlacionadas a pares y el coeficiente de correlación es ρ.

Índice de Concentración del Riesgo

La covarianza entre cualquier par de créditos *(i, j)* está dada por:

$$\sigma_{i,j} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} = \sqrt{p_i(1-p_i)}\sqrt{p_j(1-p_j)}\rho_{ij} = p(1-p)\rho$$

La matriz de covarianzas tiene la siguiente estructura:

$$\mathbf{M} = p\cdot(1-p)\cdot\begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \rho \\ \rho & \cdots & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizando notación matricial:

$$\mathbf{M} = p(1-p)\cdot[\rho\mathbf{1}\mathbf{1}^T + (1-\rho)\mathbf{I}]$$

Índice de Concentración del Riesgo

La varianza de las pérdidas de este portafolio está dada por:

$$\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{F} = p(1-p)\cdot[\rho(\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{F})^{2} + (1-\rho)(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F})]$$

La expresión del VaR es:

$$VaR_{\alpha} = V\left[p + z_{\alpha}\sqrt{p(1-p)}\sqrt{\rho + (1-\rho)H(F)}\right]$$

Conjuga
corre
concentración.

Varianza Bernoulli

Correlación y Concentración del Riesgo

Índice de Concentración del Riesgo

Igualando la varianza del portafolio a la varianza del caso particular, se deben encontrar "p" y "ρ_e" tales que:

$$R(\mathbf{F},\mathbf{M})\cdot H(\mathbf{F}) = p\cdot(1-p)\cdot[\rho_e+(1-\rho_e)H(\mathbf{F})] = p(1-p)\cdot H'$$

Si $p = \dfrac{\pi^{\mathbf{T}}\mathbf{F}}{V'}$, despejando "$\rho_e$", se tiene:

$$\rho_e = \frac{\left(\dfrac{R(\mathbf{F},\mathbf{M})}{p(1-p)} - 1\right)}{\left(\dfrac{1}{H(\mathbf{F})} - 1\right)}$$

<u>Correlación Equivalente:</u> Resume la forma en que están correlacionados a pares todos los créditos de la cartera.

Ejemplo

Un portafolio de 25 créditos se segmenta en tres grupos, supóngase $K=\$60,000$. Además, se tienen los siguientes datos:

Probabilidades de Incumplimiento

Calificación	A	B	C	D	E	F	G
Media (%)	1.65	3.00	5.00	7.50	10.00	15.00	30.00
Desv. (%)	12.74	17.06	21.79	26.34	30.00	35.71	45.83

La matriz de correlación está dada por:

Segmento	1	2	3
1	18%	29%	24%
2	29%	23%	32%
3	24%	32%	43%

Calificación	Monto
A	$ 4,728
C	$ 3,204
C	$ 4,912
D	$ 5,320
D	$ 20,239
F	$ 1,933
F	$ 2,598
G	$ 1,090
Total	$ 44,024

Calificación	Monto
B	$ 5,528
C	$ 3,138
C	$ 4,831
E	$ 5,042
E	$ 15,411
F	$ 2,411
G	$ 358
G	$ 6,467
Total	$ 43,186

Calificación	Monto
A	$ 7,728
B	$ 5,848
C	$ 5,435
D	$ 5,765
E	$ 1,800
F	$ 2,317
G	$ 2,652
G	$ 4,929
G	$ 6,480
Total	$ 42,954

$H(F_1)=26\%$

$R(R_1,F)=11\%$

$H(F_2)=20\%$

$R(R_2,F)=14\%$

$H(F_3)=13\%$

$R(R_3,F)=15\%$

Segmentación del Portafolio: Ejemplo.

Si la razón de capitalización de cada segmento está dada por

$$\psi_i = \frac{K_i}{V_i} = \frac{V_i}{V} \times \frac{K}{V_i} = \qquad \forall\ i$$

¿Se satisfacen las relaciones de suficiencia de capital?

$$\frac{VaR^1}{V_1} = \frac{16,122}{44,024} = 36.6\% < 46.1\% = \Psi_1$$

$$\frac{VaR^2}{V_2} = \frac{19,268}{43,186} = 44.6\% < 46.1\% = \Psi_2$$

$$\frac{VaR^3}{V_3} = \frac{20,655}{42,954} = 47.2\% > 46.1\% = \Psi_3$$

Segmentación del Portafolio: Ejemplo

Si la relación de suficiencia de capital se satisface, ¿cuáles son los límites por acreditado?

$\leq \quad \times \quad =$ | $\psi \quad >$

$\leq \quad \times \quad =$ | $\psi \quad >$

$\leq \quad \times \quad =$ | $\psi \quad <$

¿Algún sector en particular exhibe un riesgo de concentración excesivo?

$H(F_1) = 26\%$
$\rho_1 = 14\%$
$H_1'(F) = 36\%$

$H(F_2) = 20\%$
$\rho_2 = 17\%$
$H_2'(F) = 34\%$

$H(F_3) = 13\%$
$\rho_3 = 28\%$
$H_3'(F) = 37\%$

Índice

I. Introducción

II. CyRCE

1. El Modelo General
2. Segmentación del Portafolio
3. Índice de Concentración del Riesgo
4. Estimación con Escasez de Información
5. Comparación con Otros paradigmas

Estimación del IHH con información limitada. (I)

La cartera se segmenta en "*h*" grupos distintos.

Si conocemos:

- El valor total de la cartera de cada segmento, V_i.
- El crédito mayor de cada grupo "f^*_i", entonces, por la propiedad 1 del IHH se tiene:

$$H(\mathbf{F}_i) \leq \theta_i = \frac{f_i^*}{V_i}$$

Por lo tanto, $H(\mathbf{F}_i) = \theta_i$ es una estimación (conservadora) del IHH de cada segmento.

Estimación del IHH con información limitada. (II)

Si se tiene un poco más de información y para cada grupo se conoce:

- El número de créditos en cada grupo, N_i,
- El monto promedio de los créditos, $\overline{f_i}$,
- La varianza del monto de los créditos, $\overline{\sigma_i}^2$, entonces:

$$\overline{\sigma}_i^2 = \frac{\sum_k (f_k^i - \overline{f}_i)^2}{N_i - 1} = \frac{N_i^2 (\overline{f}_i)^2}{N_i - 1}\left[H(F_i) - \frac{1}{N_i} \right]$$

$$H(F_i) = \frac{N_i - 1}{N_i^2}\left(\frac{\overline{\sigma}_i}{\overline{f}_i} \right)^2 + \frac{1}{N_i} \rightarrow \frac{1}{N_i}\left(\frac{\overline{\sigma}_i}{\overline{f}_i} \right)^2$$

Índice

I. Introducción

II. CyRCE

1. El Modelo General
2. Segmentación del Portafolio
3. Índice de Concentración del Riesgo
4. Estimación con Escasez de Información
5. Comparación con Otros paradigmas

Replicación del Ejercicio de Gordy (JBF 2000)

- **Michael Gordy realizó un estudio comparativo entre CreditRisk^{+} y CreditMetrics^{TM} que se ha vuelto el estándar de comparación:**

1. Usando una variable latente y viendo a los modelos de incumplimiento como "probits ordenados", Mostró como se puede mapear CreditRisk^{+} en CreditMetrics^{TM} y viceversa.
2. Diseñó carteras de créditos de "calidades" diferentes, para evidenciar numéricamente las diferencias entre paradigmas por los supuestos que utilizan.
3. Nosotros replicamos el estudio para ver como CyRCE se puede mapear de y hacia estos dos paradigmas así como las diferencias que evidencia el ejercicio numérico.

Mapeo entre CyRCE y CreditRisk^{+}

- El supuesto más importante en CyRCE es que la distribución de pérdidas se puede caracterizar por su media y por su varianza.
- CreditRisk^{+} tiene supuestos concretos sobre la distribución de las probabilidades de incumplimiento:

$$p_{c(i)}(x) = \bar{p}_{c(i)} \sum_k x_k w_{c(i)k}$$

- $p_{c(i)}(x)$ es la probabilidad de incumplimiento incondicional de un crédito con calificación $c(i)$. Depende de factores aleatorios externos x_k que siguen una distribución gama.
- A partir de estos supuestos se pueden obtener los momentos necesarios para introducirlos a CyRCE

Mapeo entre CyRCE y CreditRisk⁺

- Por los supuestos de CreditRisk⁺ la pérdida esperada de un crédito con monto L y calificación $c(i)$ es simplemente:

$$L\overline{p}_{c(i)}$$

- De igual forma la correlación entre cualesquiera par de créditos con calificaciones $c(i)$ y $c(j)$ viene dada por:

$$\rho_{ij} = \frac{\overline{p}_{c(i)}\overline{p}_{c(j)}\sum_k w_{c(i)k}w_{c(j)k}\beta_k}{\sqrt{\overline{p}_{c(i)}(1-\overline{p}_{c(i)})}\sqrt{\overline{p}_{c(j)}(1-\overline{p}_{c(j)})}}$$

- Donde β_k es la varianza del factor x_k.
- De esta forma recuperamos los parámetros necesarios para CyRCE.
- El mapeo de CyRCE a CreditRisk⁺ se obtiene de forma inversa una vez se han definido los factores gama de CreditRisk⁺

Mapeo entre CyRCE y CreditMetrics™

- De forma análoga se puede hacer el mapeo de CreditMetrics™ (limitado a dos estados) a CyRCE.
- Basta recordar que la distribución de la probabilidad de incumplimiento viene dada por la siguiente condición:

$y_i < C_{\xi(i)}$ con $y_i = Xw_i + \eta_i \in_i;\ \in_i \sim N(0,1)$ y $X \sim N(0,\Sigma)$

- Procediendo de forma análoga al modelo anterior se obtienen los parámetros necesarios para la aplicación de CyRCE.
- Nuevamente basta definir los factores X para desandar los pasos anteriores y obtener CreditMetrics™ a partir de CyRCE.

El ejercicio Numérico.

- Para el ejercicio numérico, se siguió el procedimiento de Gordy construyendo 4 carteras de diferentes calidades crediticias:

- Cada cartera contiene 5,000 créditos y la misma exposición total.
- La cartera de alta calidad tiene la mayor proporción de créditos con la mínima PD. La proporción de créditos de mínima PD decrece sucesivamente para formar las tres restantes de menor calidad.
- Se obtuvo la distribución de pérdidas para cada cartera con cada uno de los paradigmas. (CreditRisk+, CreditMetrics y CyRCE).

Resultados : Cartera de más alta calidad.

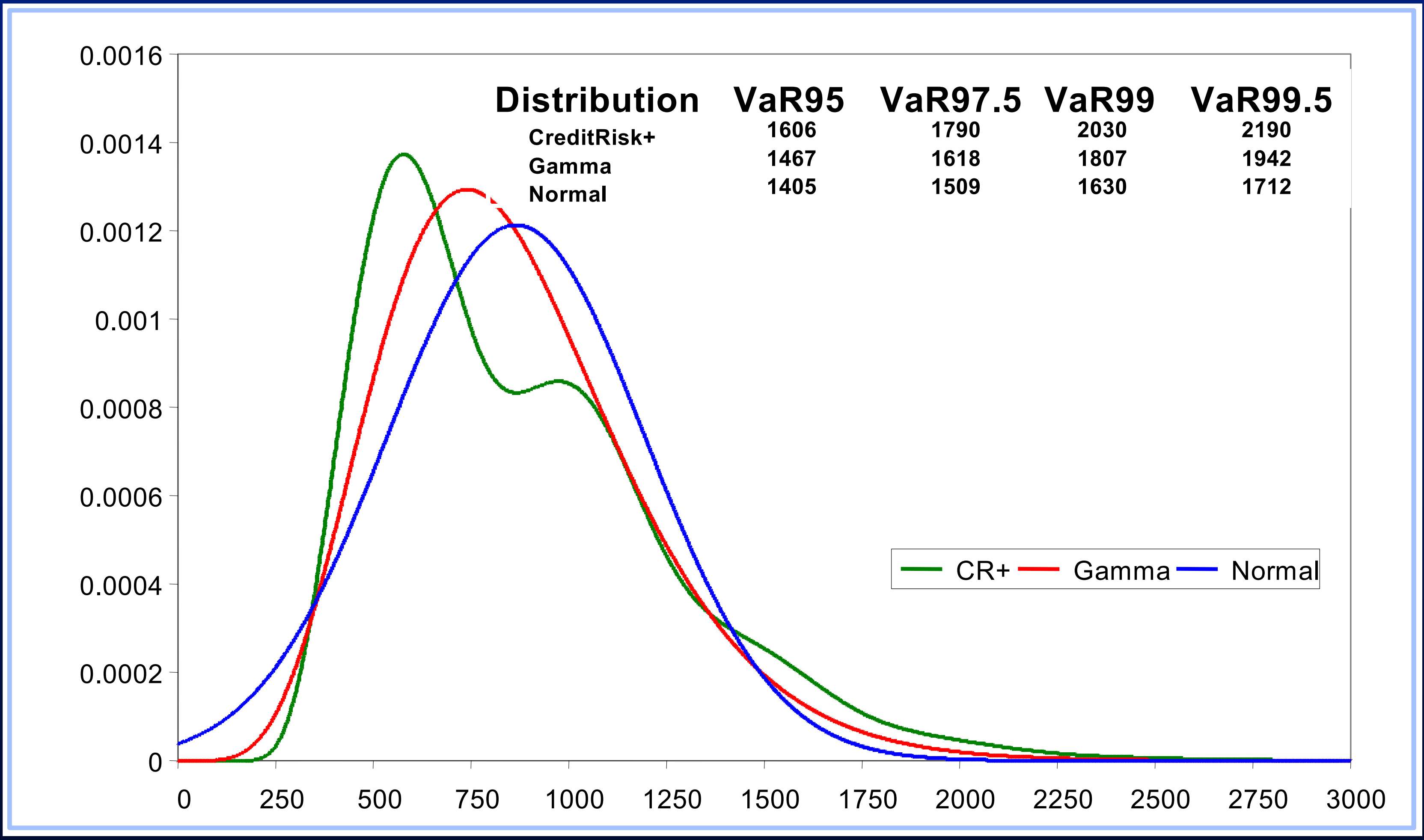
	Alta Calidad				
	CM[TM]	CR^{+}			CyRCE
		$\sigma =$ *1*	*1.5*	*4*	
Media	166.55	166.55	166.55	166.55	166.55
Desv. Est.	168.34	249.24	249.24	249.24	165.82
Coef. Asim.	0.39	1.99	2.88	7.23	1.17
Curtosis	1.72	8.35	13.19	33.06	2.06
α			**VaR al** α		
50%	136	68	24	0	116
75%	157	152	91	1	231
95%	290	391	331	158	497
99%	1,020	947	771	641	764
99.5%	1,046	1,092	1,026	957	878
99.97%	1,221	1,643	1,677	2,165	1,343

Resultados : Cartera de menor Calidad.

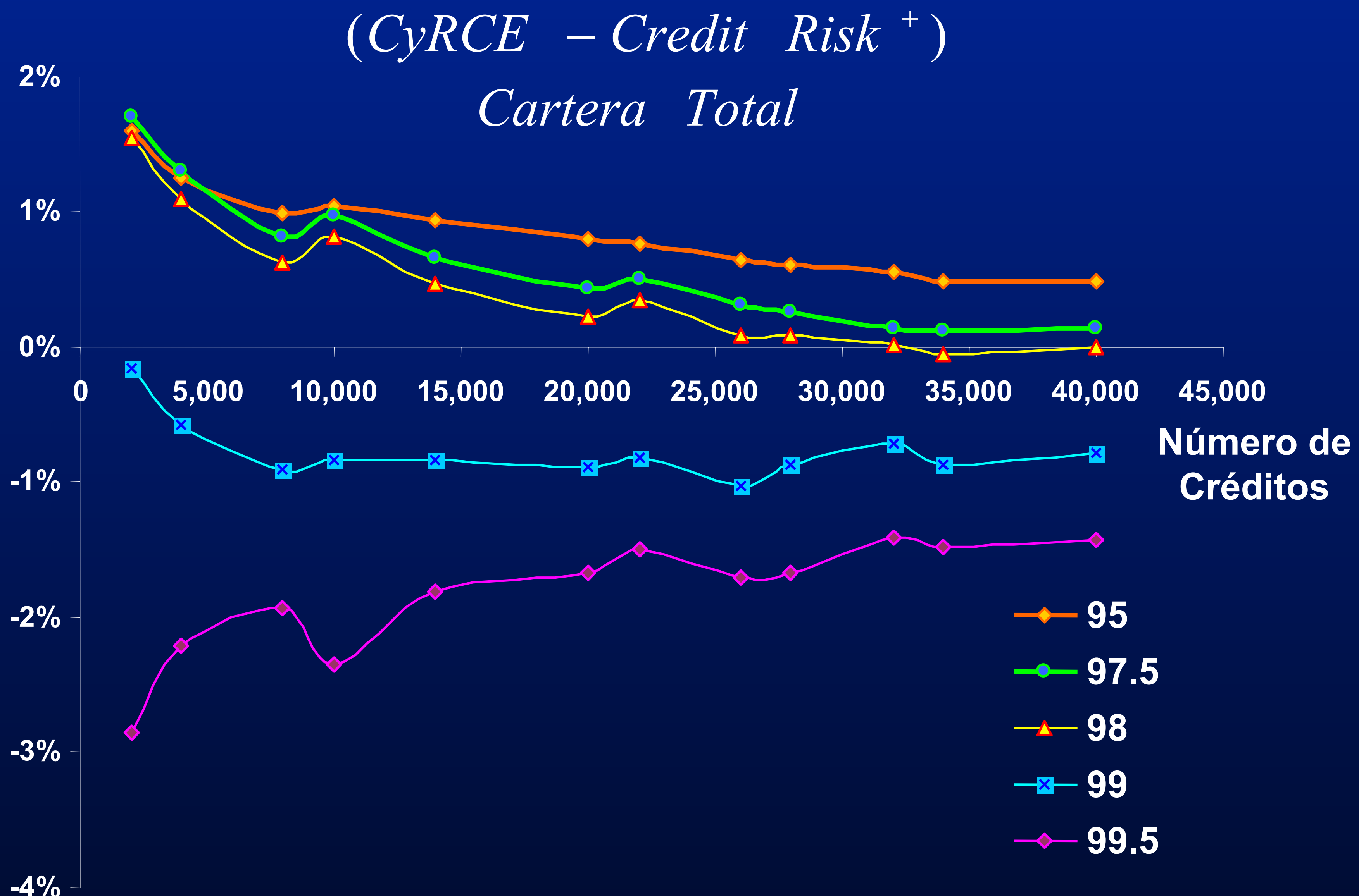
	Muy Baja Calidad				
	CM™	CR+			CyRCE
		$\sigma =$ *1*	*1.5*	*4*	
Media	2479.23	2479.23	2479.23	2479.23	2479.23
Desv. Est.	1152.55	1404.66	1404.66	1404.66	1452.47
Coef. Asim.	1.02	3.59	4.31	8.08	1.99
Curtosis	3.43	21.35	29.15	89.75	5.95
α			**VaR al** α		
50%	2,358	909	339	0	2,202
75%	2,578	1,899	1,159	29	3,247
95%	3,313	4,289	3,782	1,959	5,247
99%	4,728	6,679	6,738	6,909	7,028
99.5%	4,970	7,709	8,059	9,554	7,761
99.97%	6,150	11,880	13,599	21,824	10,619

Comparación numérica con CreditRisk^{+}

Se hizo un estudio comparativo entre CyRCE y CreditRisk^{+} seleccionando créditos en forma aleatoria. Este es un resultado típico del ejercicio de comparación (cartera aleatoria de 1,320 créditos) :



CyRCE vs. CreditRisk⁺ : Efecto del tamaño.



Conclusiones del Estudio.

- CyRCE se puede mapear de y hacia CreditRisk+ y CreditMetrics mediante los mismos principios planteados por Michael Gordy.
- La replica del ejercicio numérico, indica que la distribución de pérdidas producida por CyRCE es más “centrada” que la que producen los otros dos:

En general tiene menos peso en el rango bajo de pérdidas que CreditMetrics y menos peso en el rango alto de pérdidas que CreditRisk+.

Resultados

- A pesar de encontrar diferencias en las distribuciones, sobre todo en las colas, los montos no son diametralmente distintos y apuntan siempre en el mismo sentido.
- La distribución de pérdidas de CyRCE tiene cambios más suaves y constantes en el VaR a medida que aumenta "α" que las otras dos.
- Esta "suavidad" se debe a la elección de una distribución "pura" en contra del resultado de la aproximación en CreditRisk$^+$ y de la simulación en CreditMetrics™
- Se hicieron también ejercicios de robustez con resultados satisfactorios.

FIN