

UN MODELO ANALÍTICO DE GESTIÓN DEL RIESGO DE CRÉDITO DE TITULIZACIONES

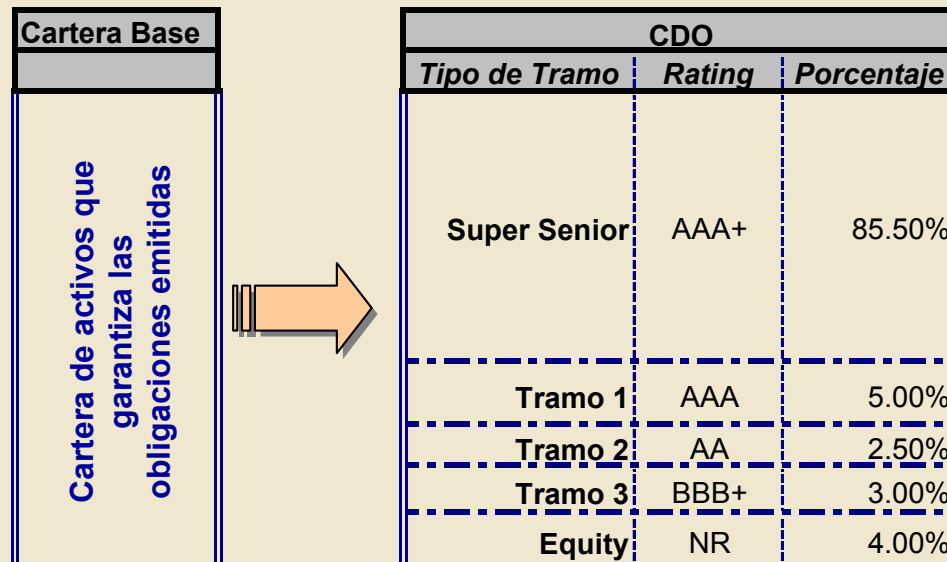
Juan Carlos García Céspedes
Diciembre de 2.003

CDO: DEFINICIÓN

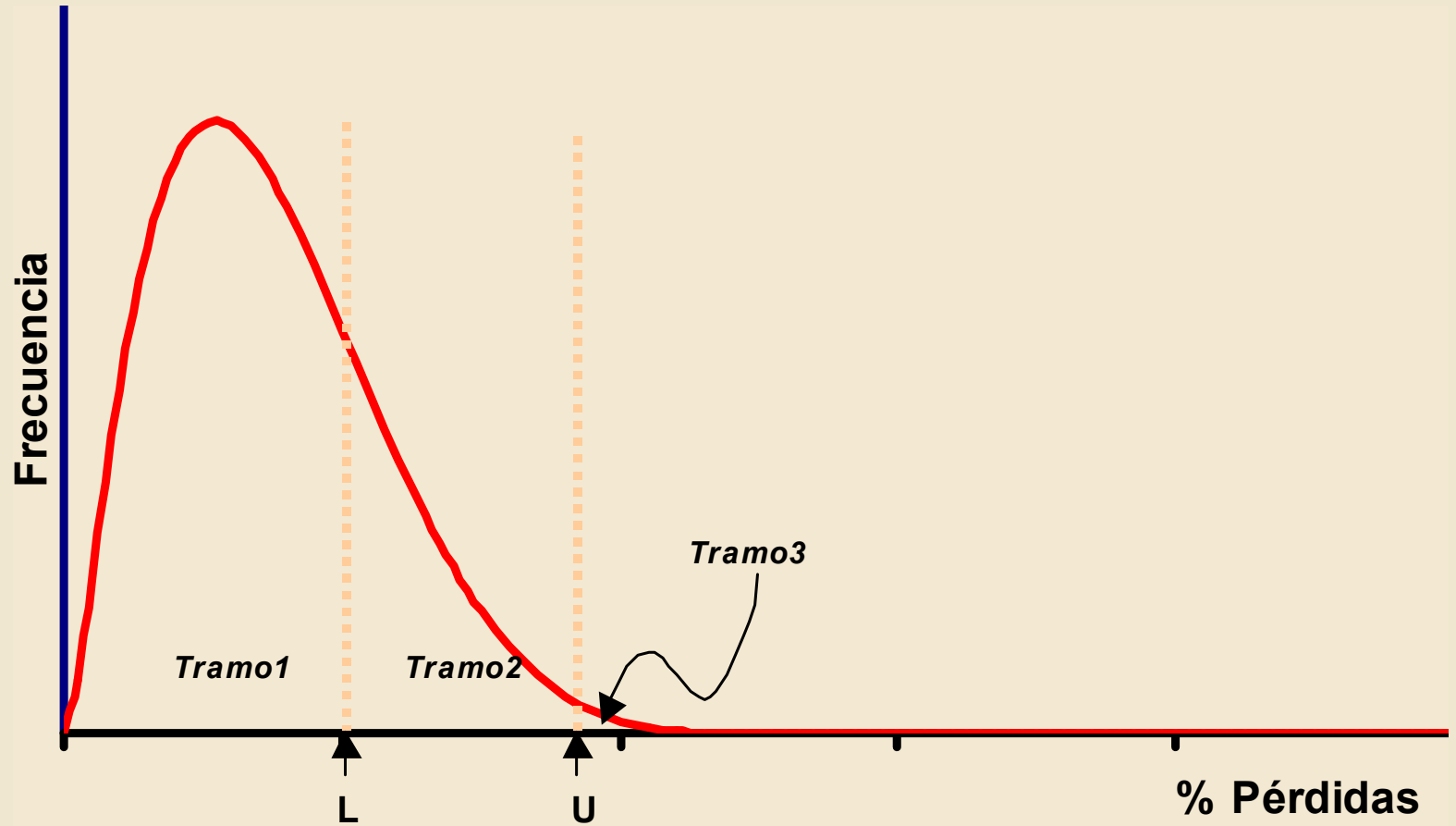
Un **CDO (Collateralised Debt Obligation)** es una estructura formada por un conjunto de **activos** (colateral), de **pasivos** (obligaciones de tipo senior, mezzanine, junior) y de **equity**.

- Los **activos** pueden ser préstamos (CLO), bonos (CBO) o una combinación de éstos (CDO).
- Los **pasivos** son las obligaciones que se emiten y se estructuran en distintos tramos de modo que cada tramo está expuesto a las pérdidas provocadas por defaults una vez que se consuman los tramos que están por debajo.

Se crea un vehículo de propósito especial (**SPV**) al que se transfieren los activos (préstamos comerciales, bonos, etc.). La sociedad SPV, utiliza los activos como colateral, para emitir una serie de bonos con un grado de prelación perfectamente determinado, la denominada “cascada” (**waterfall**). Las diferentes tranchas pagan spreads acordes con su grado de prelación y por tanto de riesgo.



EJEMPLO: CDO DE 3 TRAMOS



Objetivo

- Modelizar la calidad crediticia de un CDO así como las características de riesgo de cada tramo del mismo en términos de:
 - Probabilidad de Incumplimiento (PD)
 - Severidad (LGD)
 - Pérdida Esperada (EL)

Para ello es fundamental disponer de las **probabilidades de incumplimiento** de los activos titulizados, de su **severidad (LGD)** y además, de una razonable estimación de correlaciones (**estructura de dependencia**) de los activos titulizados

ENFOQUE: Aproximación analítica basada en el modelo similar a BIS II

La distribución de pérdidas es una función de:

- Probabilidad de incumplimiento (PD) media
- Severidad (LGD) media
- Correlación de activos (ρ) media

Otras alternativas

- Simulación de Montecarlo: p.ej. S&P CDO Evaluator

CARACTERIZACIÓN DEL RIESGO DE LOS TRAMOS

Conociendo los activos subyacentes que forman parte de la cartera base del CDO, se podría aproximar la función de distribución de pérdidas de los mismos.

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2} \cdot \left[\Phi^{-1}\left(\frac{x}{LGD}\right)\right]^2 - \frac{1}{2\rho} \cdot \left[\sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{x}{LGD}\right) - \Phi^{-1}(PD)\right]^2\right\} \cdot \frac{1}{LGD}$$

Donde

- PD es la probabilidad de incumplimiento media de los activos
- LGD es la severidad media de los activos
- ρ es la correlación de activos “implícita”

El modelo de BIS II se basa en el supuesto de un número infinito de activos y una correlación única entre estos, mientras que el número de activos en el CDO puede ser bajo y su estructura de correlaciones más rica. **Una aproximación** razonable puede ser **estimar una correlación “implícita” tal que la desviación típica de las pérdidas crediticias (pérdidas inesperadas) calculada utilizando la distribución de BIS II sea igual a la real.**

CARACTERIZACIÓN DEL RIESGO DE LOS TRAMOS

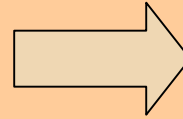
A partir de dicha distribución de pérdidas y de la estructura del CDO, se pueden calcular las características de riesgo de cada tramo, *“como si fuera un bono”*:

- Probabilidad de Incumplimiento (PD)
- Pérdida Esperada (EL)
- Pérdida No Esperada (UL)
- Severidad (LGD) media
- Volatilidad de la severidad (Vol. LGD)

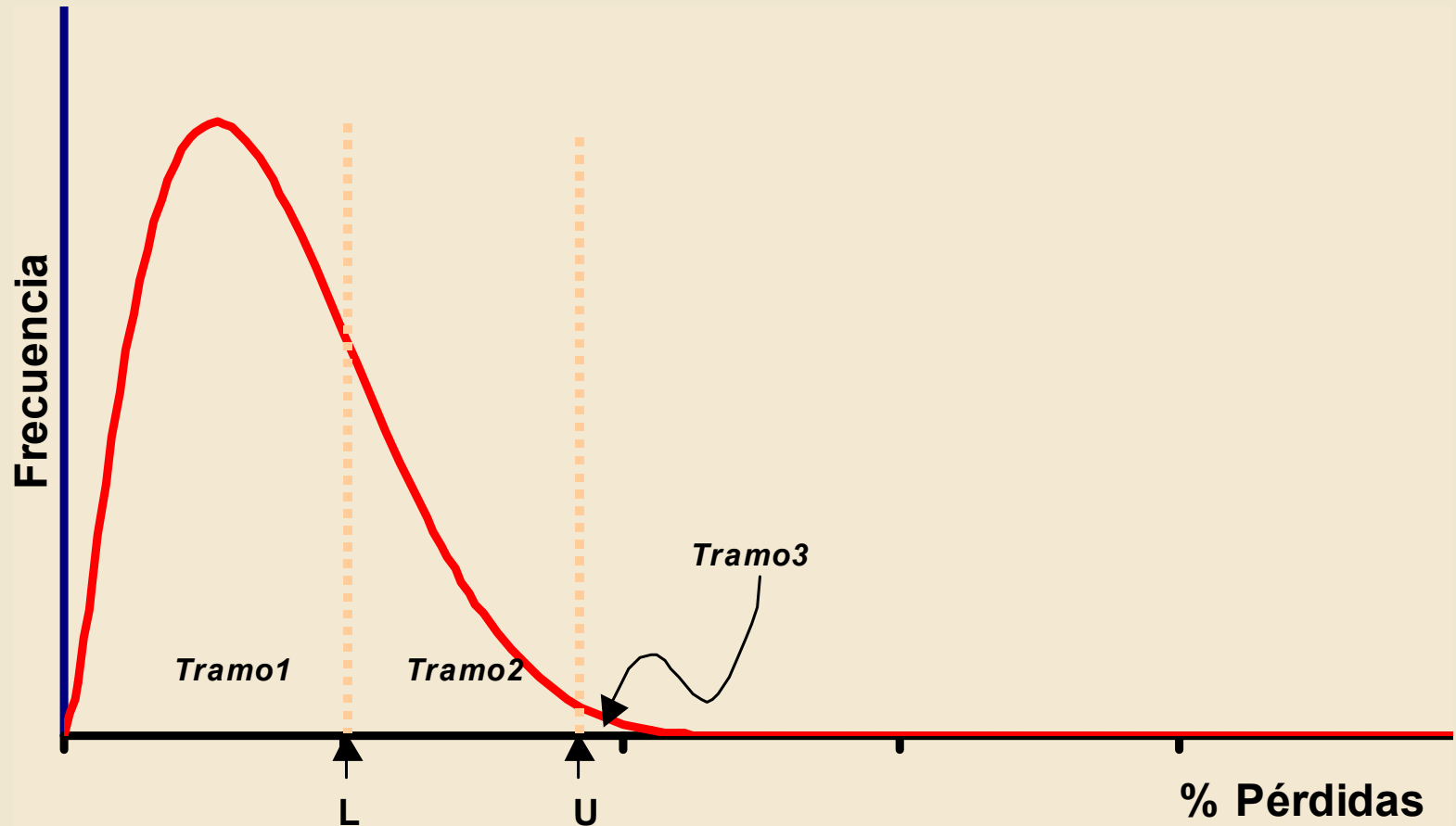
Y, por tanto, se puede obtener, a partir de estas características, un rating “implícito” para cada tramo.

DISTRIBUCIÓN DE PÉRDIDAS

¡Probabilidad de que el Tramo 1 incumpla = 100%!

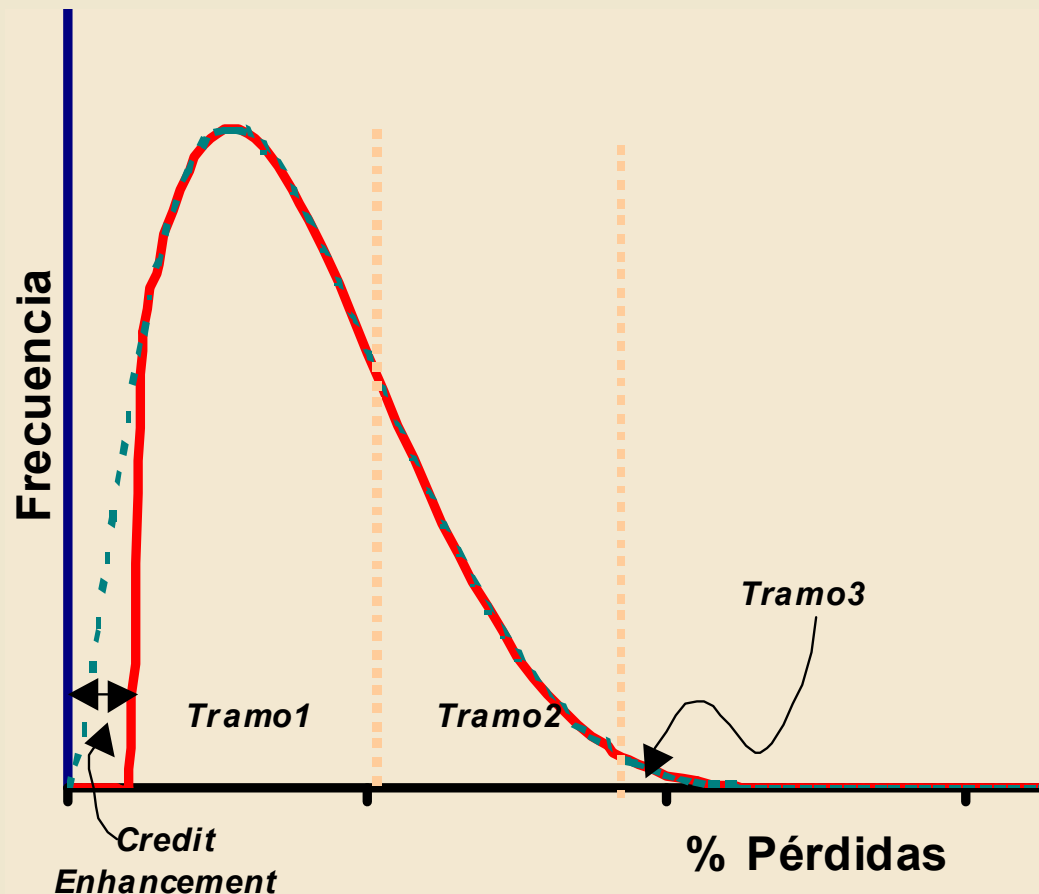


Es habitual incluir un “credit enhancement” (mejora crediticia)



DISTRIBUCIÓN DE PÉRDIDAS

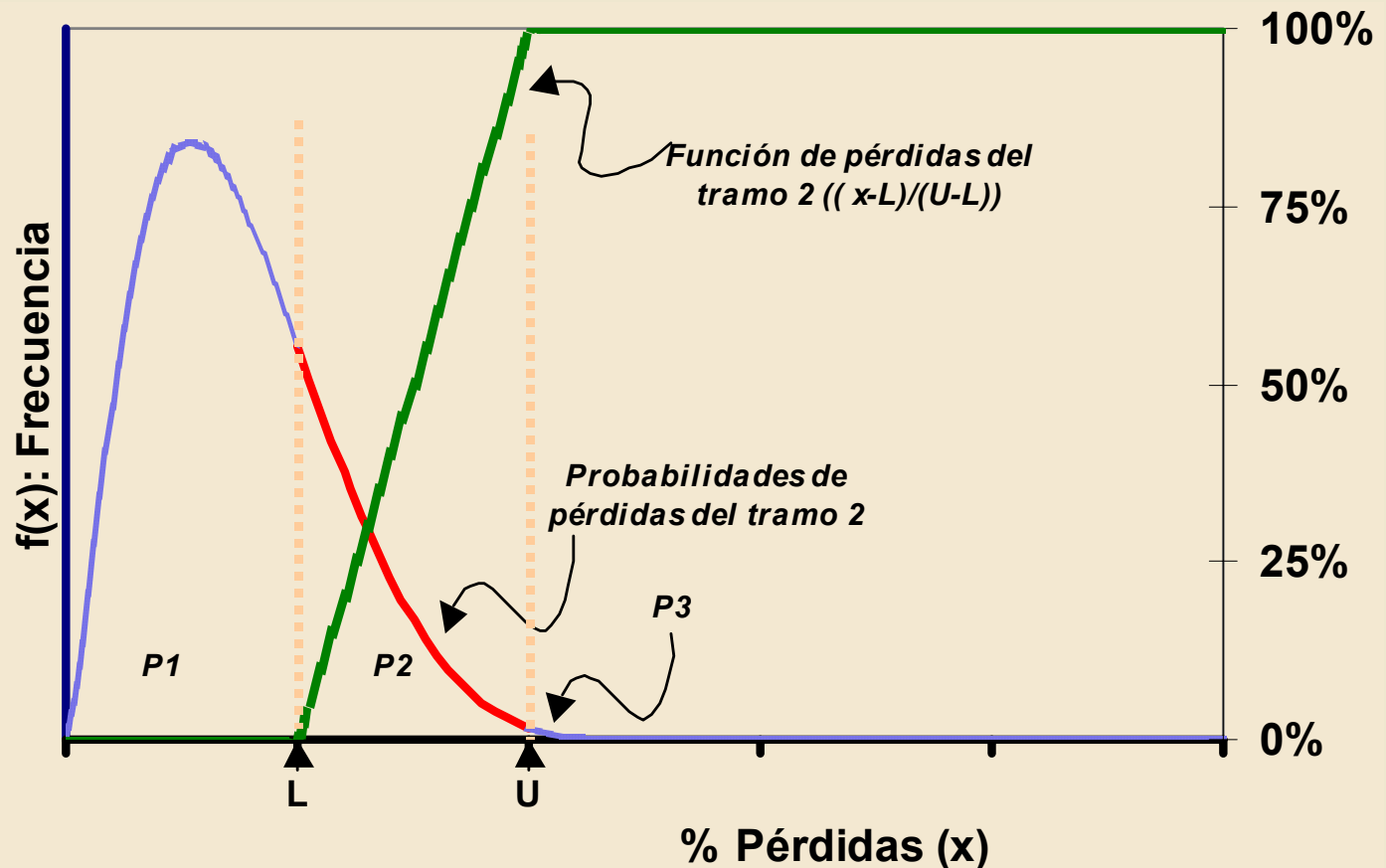
La existencia de un credit enhancement (mejora crediticia) elimina parte de la distribución en la zona de bajas pérdidas crediticias y por tanto reduce las probabilidades de incumplimiento de todos los tramos de la titulización.



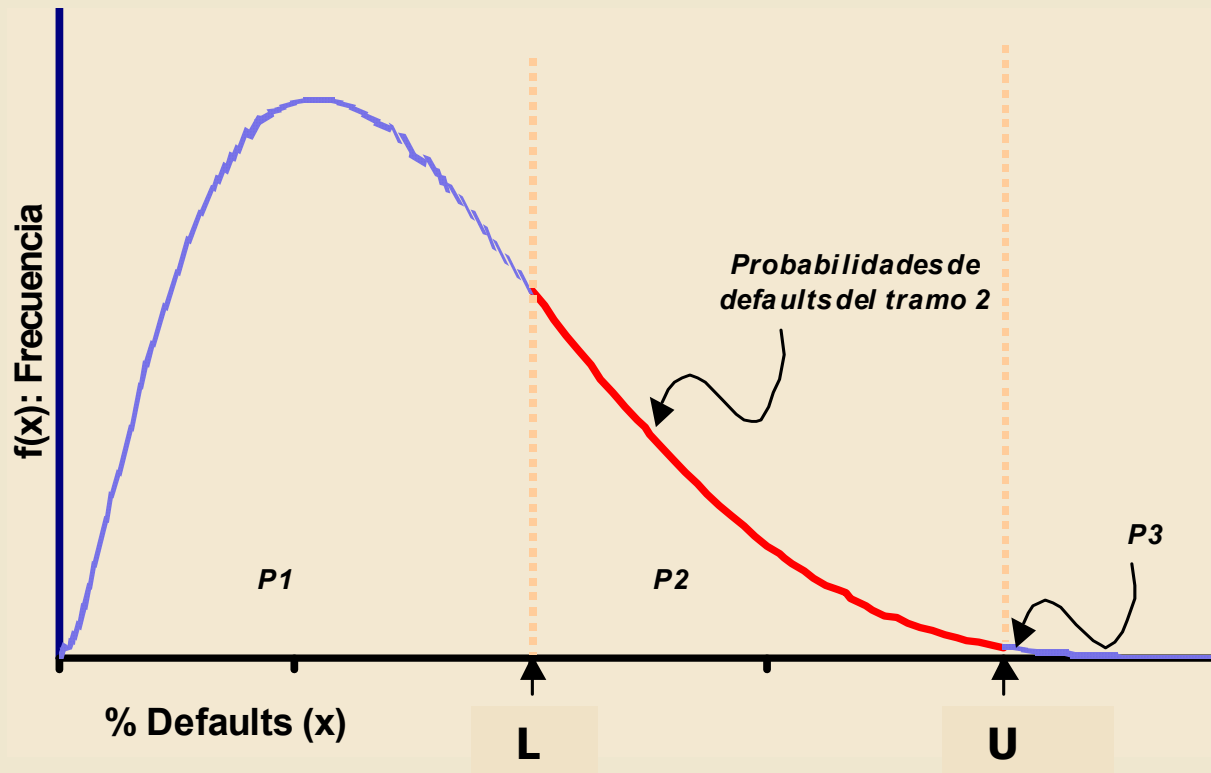
CARACTERIZACIÓN DEL RIESGO DE LOS TRAMOS

Ejemplo: Tramo 2

- El tramo 2 sólo soporta pérdidas si las pérdidas superan el umbral “L”.
- A partir de L soporta todas la pérdidas que vayan ocurriendo hasta el umbral “U”.
- A partir de U las pérdidas del tramo son del 100% de la exposición.



PROBS. DE INCUMPLIMIENTO DE LOS TRAMOS



$$PD_1 = 100\%$$

$$PD_2 = 1 - P_1 = 1 - \int_{0\%}^L f(x) \cdot dx$$

$$PD_3 = 1 - P_1 - P_2 = 1 - \int_{0\%}^U f(x) \cdot dx$$

PÉRDIDAS ESPERADAS DE LOS TRAMOS (I)

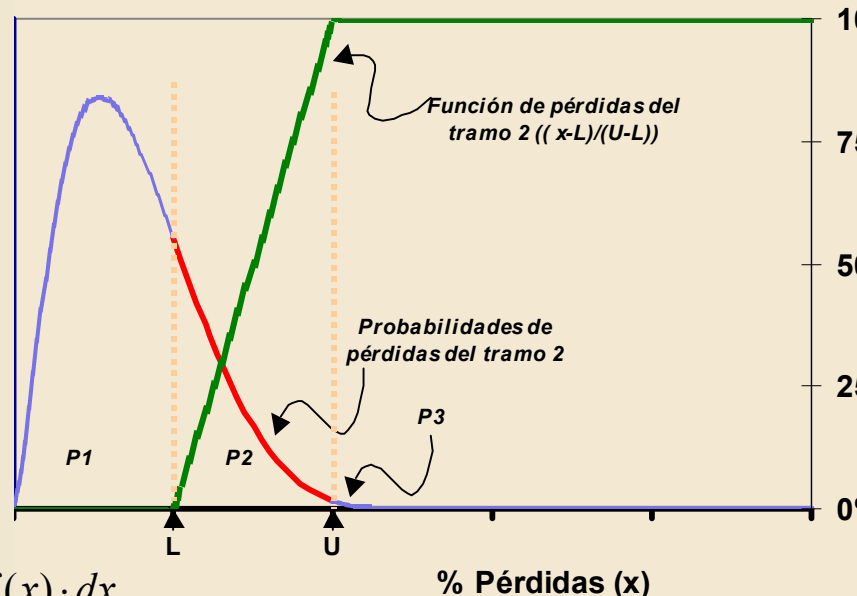
El tramo 2 sólo se verá afectado si las pérdidas superan el umbral L , a partir del cual irá soportando todas las pérdidas que vayan ocurriendo hasta el umbral U (ahí las pérdidas del tramo serían del 100% de la exposición).

$$1 - F(L) \rightarrow PD_2 = 1 - P_1$$

Por otra parte, la pérdida esperada del tramo 2 es

$$EL_2 = \int_{0\%}^{100\%} g(x) \cdot f(x) \cdot dx$$

$$= \int_{0\%}^L 0\% \cdot f(x) \cdot dx + \int_L^U \left(\frac{x-L}{U-L} \right) \cdot f(x) \cdot dx + \int_U^{100\%} 100\% \cdot f(x) \cdot dx$$



$$EL_2 = 0\% \cdot P_1 + \int_L^U \left(\frac{x-L}{U-L} \right) \cdot f(x) \cdot dx + 100\% \cdot PD_3$$

\uparrow $F(L)$ \uparrow $1 - F(U)$

SEVERIDAD EQUIVALENTE DE LOS TRAMOS

donde $PD_3 = 1 - P_1 - P_2$.

Dado que

$$EL_2 = PD_2 \cdot \overline{LGD}_2$$

Por lo que tenemos ya se puede calcular la LGD media que está implícita en ese tramo del CDO, siendo posible caracterizar a dicho tramo como un bono de PD y LGD dada:

$$(1 - P_1) \cdot \overline{LGD}_2 = 0\% \cdot P_1 + \int_L^U \left(\frac{x - L}{U - L} \right) \cdot f(x) \cdot dx + 100\% \cdot PD_3$$


$$\overline{LGD}_2 = \frac{EL_2}{PD_2} = \frac{0\% \cdot P_1 + \int_L^U \left(\frac{x - L}{U - L} \right) \cdot f(x) \cdot dx + 100\% \cdot PD_3}{(1 - P_1)}$$

PÉRDIDA INESPERADA DE LOS TRAMOS

También se puede calcular la volatilidad de la LGD de cada tramo, a partir de la pérdida no esperada del tramo en cuestión:

$$\begin{aligned} UL_2^2 &= \int_{0\%}^{100\%} (x - EL_2)^2 \cdot f(x) \cdot dx \\ &= \int_{0\%}^{100\%} x^2 \cdot f(x) \cdot dx - EL_2^2 \\ &= \int_{0\%}^L (0\%)^2 \cdot f(x) \cdot dx + \int_L^U \left(\frac{x - L}{U - L} \right)^2 \cdot f(x) \cdot dx + \int_U^{100\%} (100\%)^2 \cdot f(x) \cdot dx - EL_2^2 \end{aligned}$$

$$UL_2^2 = \int_L^U \left(\frac{x - L}{U - L} \right)^2 \cdot f(x) \cdot dx + PD_3 - EL_2^2$$


$$1 - F(U)$$

VOLATILIDAD DE LA SEVERIDAD

Como por otro lado

$$UL_2 = \sqrt{PD_2 \cdot \sigma_{LGD_2}^2 + \overline{LGD_2}^2 \cdot PD_2 \cdot (1 - PD_2)}$$

ya se puede calcular la volatilidad de la LGD del tramo:

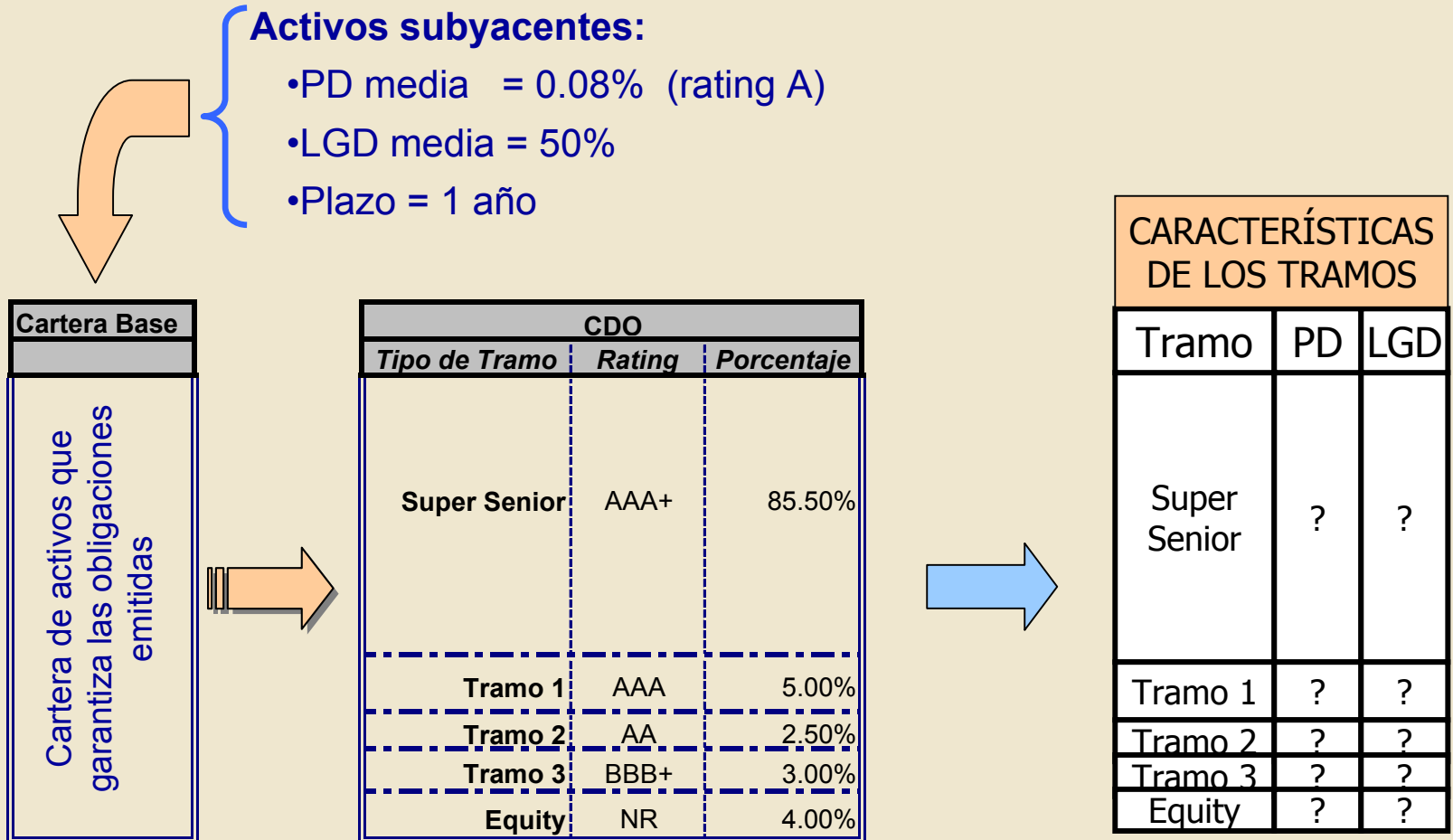
$$PD_2 \cdot \sigma_{LGD_2}^2 + \overline{LGD_2}^2 \cdot PD_2 \cdot (1 - PD_2) = \int_L^U \left(\frac{x - L}{U - L} \right)^2 \cdot f(x) \cdot dx + PD_3 - EL_2^2$$

$$\begin{aligned} \sigma_{LGD_2} &= \sqrt{\frac{UL_2^2 - \overline{LGD_2}^2 \cdot PD_2 \cdot (1 - PD_2)}{PD_2}} \\ &= \sqrt{\frac{\int_L^U \left(\frac{x - L}{U - L} \right)^2 \cdot f(x) \cdot dx + PD_3 - EL_2^2 - \overline{LGD_2}^2 \cdot PD_2 \cdot (1 - PD_2)}{PD_2}} \end{aligned}$$

Aunque todos los activos que se usan como referencia en el CDO puedan tener la misma LGD, cada uno de los tramos del CDO tiene una LGD y una volatilidad de la LGD diferentes.

EJEMPLO DE UNA TITULIZACIÓN

CDO con 5 tramos, basado en una cartera de 51 activos



EJEMPLO - RESULTADOS

Caracterización del riesgo de los tramos

	Características de los tramos			RATING	RATING
	% Cartera	PD	EL	externo	interno
Equity	4.0%	100.00%	0.96%	NR	BB-
Tramo 1	3.0%	0.10%	0.05%	BBB+	A-
Tramo 2	2.5%	0.03%	0.02%	AA	AA
Tramo 3	2.5%	0.03%	0.02%	AA	AA
Super senior	5.0%	0.01%	0.01%	AAA	AAA
	85.5%	0.00%	0.0001%	AAA	AAA
	100.0%		0.04%		

TITULIZACIONES Y PERFIL DE RIESGO

En la presentación se ha discutido como caracterizar una titulización.

Sin embargo tan importante como esto (o más) es analizar el impacto que una titulización puede tener en el perfil de riesgo de una cartera. Sería muy interesante conocer cómo, adquirir un determinado tramo de una titulización, afecta al perfil de riesgo de una entidad.

Para ello no sólo importan las correlaciones entre los activos subyacentes a la titulización sino como dichos activos están correlacionados con el resto de la cartera crediticia de la entidad, y por extensión, como los diferentes tramos de la titulización se correlacionan con dicha cartera.

Este problema es mucho más complejo que la caracterización del riesgo de una titulización *stand-alone*.

En BBVA se han desarrollado algunas soluciones a este problema basadas en modelos de crédito bifactoriales que, desgraciadamente, no arrojan soluciones analíticas y requieren resolver integraciones numéricas.